# Mathématiques II

DURÉE : 4 heures

*Dans tout le problème, E désigne l'algèbre des endomorphismes du plan vectoriel réel* $\mathbf{R}^2$ *et* $e$ *l'unité de* E *(c'est-à-dire l'identité de* $\mathbf{R}^2$*). On note respectivement* $\mathrm{Tr}(f)$ *et* $\det(f)$ *la trace et le déterminant d'un élément* $f$ *de* E.

*On rappelle qu'une transformation orthogonale d'un espace vectoriel muni d'une forme quadratique* Q *non dégénérée est un automorphisme* $\varphi$ *de cet espace vectoriel tel que* $Q \circ \varphi = Q$, *et que deux vecteurs* $x$ *et* $y$ *sont orthogonaux pour* Q *si*

$$Q(x+y) = Q(x) + Q(y).$$

*Le vecteur* $x$ *est isotrope pour* Q *si* $Q(x)$ *est nul.*

## I

1° Vérifier que l'application $f \longmapsto \det(f)$ de E dans $\mathbf{R}$ est une forme quadratique non dégénérée, de même que sa restriction au sous-espace vectoriel T des endomorphismes de trace nulle.

2° Soit $\theta$ l'application de E dans E définie par

$$\theta(f) = (\mathrm{Tr}(f))\, e - f, \quad f \in E.$$

Reconnaître $f \circ (\theta(f))$.

Démontrer que $\theta$ est une symétrie en précisant ses sous-espaces propres.

3° Exprimer la forme bilinéaire symétrique attachée à la forme quadratique det sur E à l'aide de l'application $(f, g) \longmapsto \mathrm{Tr}(f \circ (\theta(g)))$ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$.

*Dans toute la suite du problème, l'espace vectoriel* E *est muni de la forme quadratique* det. *On désigne par* $\mathbf{O}$ *le groupe des transformations orthogonales de cet espace vectoriel et par* $\mathbf{O}^+$ *le sous-groupe de* $\mathbf{O}$ *des éléments de déterminant* 1.

4° Vérifier que $\theta$ est un élément de $\mathbf{O}$ et préciser son déterminant.



## II

1° Caractériser par leur déterminant et leur trace les éléments $f$ de E, autres que $e$ et $-e$, vérifiant $f^2 = e$. Faire de même pour ceux qui vérifient $f^2 = -e$.

2° On considère trois éléments $i, j, k$ de T (c'est-à-dire de E et de trace nulle) tels que

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = e \\ i \circ j = k \end{cases}$$

*a.* Expliciter un exemple d'un tel triplet en donnant les matrices de ses éléments dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

*b.* Démontrer que $e, i, j, k$, constituent toujours une base orthogonale de E.

*c.* Préciser $\det(i)$, $\det(j)$ et $k^2$.

*d.* Démontrer que $j \circ i = -k$, puis déterminer les coordonnées de $i \circ k$, $k \circ i$, $j \circ k$, $k \circ j$ sur la base $e, i, j, k$.

3° *a.* Soit $f$ un élément de E qui n'est pas une homothétie. Déterminer, en fonction de $f$, les éléments $g$ de E tels que $g \circ f = f \circ g$.

*b.* En déduire les éléments $g$ de E tels que $g \circ f = f \circ g$ pour tout élément $f$ de E.

4° On note S l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ de déterminant 1 ou $-1$.

*a.* Démontrer que la composition des applications confère à S la structure de groupe.

*b.* Démontrer que, pour tout automorphisme $f$ de $\mathbf{R}^2$, il existe un unique couple $(\rho, f_1)$ avec $\rho$ réel strictement positif et $f_1$ élément de S tel que $f = \rho f_1$.

5° Soit $f$ et $g$ deux éléments de T. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

*i.* $f$ et $g$ sont orthogonaux dans E,

*ii.* $\mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$,

*iii.* $f \circ g = -g \circ f$.

## III

1° Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel V réel à dimension finie $n$. Soit $x$ un vecteur non isotrope de V.

*a.* Établir qu'il existe une transformation orthogonale et une seule $\sigma_x$, telle que $\sigma_x(x) = x$ et $\sigma_x(y) = -y$ pour tout vecteur $y$ de V orthogonal à $x$.

Calculer le déterminant de $\sigma_x$ en fonction de $n$.

*L'application $\sigma_x$ est appelée la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $x$.*

*b.* Soit $\varphi$ une transformation orthogonale de V. Vérifier que l'un au moins des deux vecteurs $u = x + \varphi(x)$ ou $v = x - \varphi(x)$ est non isotrope et que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

*c.* Reconnaître, si le vecteur $u$ précédent est non isotrope, le vecteur $\sigma_u(\varphi(x))$. Reconnaître aussi $\sigma_v(\varphi(x))$ lorsque $v$ est non isotrope.

*d.* Démontrer que si $n = 2$ alors $\varphi$ est soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite, soit le produit de deux telles symétries.

En déduire que, si $n = 3$ et si $\varphi$ est de déterminant 1, alors $\varphi$ est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.

2° *a.* Soit $g$ un élément de E. Calculer en fonction de $\det(g)$ le déterminant de l'endomorphisme $f \longmapsto g \circ f$ de l'espace vectoriel E.

*b.* Soit $s$ un élément de S. Démontrer que l'application $R_s$ de T dans lui-même définie par

$$R_s(f) = s \circ f \circ s^{-1}$$

est une transformation orthogonale de T dont on précisera le déterminant. Reconnaître cette transformation quand, de plus, $s$ est un élément de T à l'aide de II.5°.*iii*.

*c.* Vérifier que l'application $R : s \longmapsto R_s$ de S dans le groupe des transformations orthogonales de T est un homomorphisme. Quel est le noyau de cet homomorphisme? Quelle est son image?



## IV

1. *a.* Soit $r$ et $s$ deux éléments de S de même déterminant. Établir que l'application $\Gamma_{r,s}$ de E dans E définie par

$$\Gamma_{r,s}(f) = r \circ f \circ s^{-1}, \quad f \in E$$

est un élément de $\mathbf{O}^+$.

*b.* Soit G le sous-groupe du groupe-produit $S \times S$ formé des éléments $(r, s)$ tels que $\det(r) = \det(s)$. Établir que l'application $\Gamma : (r, s) \longmapsto \Gamma_{r,s}$ de G dans $\mathbf{O}^+$ est un homomorphisme surjectif. Préciser le noyau de $\Gamma$.

2. Donner, à l'aide de $\Gamma$ et de l'endomorphisme 0 du I., tous les éléments de $\mathbf{O}$.

3. Démontrer que tout élément de S est produit de deux éléments de T dont l'un a pour déterminant $-1$.

En déduire que tout élément de $\mathbf{O}^+$ est le produit de deux symétries par rapport à des plans, toutes deux éléments de $\mathbf{O}^+$.